▶ 9) $W_{k,m}(Z)$ et $W_{-k,m}(-Z)$ sont indépendantes car lorsque

$|\arg Z| < \pi, \quad W_{k,m}(Z) = e^{-Z/2} Z^k (1 + O(1/Z))$

$|\arg(-Z)| < \pi \quad W_{-k,m}(-Z) = e^{Z/2} (-Z)^{-k} (1 + O(1/Z))$

et $\dfrac{W_{k,m}(Z)}{W_{-k,m}(-Z)}$ ne peut être une constante.

D'où $A W_{k,m}(Z) + B W_{-k,m}(-Z)$ décrit l'ensemble des solutions de Whittaker. Par suite ($k = P/2$ et $m = 1/2 - s$)

$$\gamma(u) = A W_{p/2,m}(2u) + B W_{+p/2,-m}(-2u)$$

et $\varphi(Z) = e^{i\mu x} (A W_{p/2,m}(2\mu y) + B W_{P/2,m}(-\mu y)$

avec $Z = x + iy$. Si elles sont dominées par une puissance de y,

$$\varphi = k e^{i\mu x} W_{P/2,m}(2py).$$

Année 1972

UN THÉORÈME DE HÖRMANDER SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ÉNONCÉ

On désigne :

— par $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{N}$) l'ensemble des entiers relatifs (resp. naturels);

— par (x_1, x_2, x_3) le point courant de $\mathbf{R}^3$;

— par $\mathbf{R}_1$ [resp. $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$] le sous-espace formé par les vecteurs de la forme $(x_1, 0, 0)$ [resp. $(0, x_2, 0)$ et $(0, 0, x_3)$];

— par (z, x_3) le point courant de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{C}_1$ étant le sous-espace formé par les vecteurs de la forme $(z, 0)$.

On identifie $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^3$ par la relation $(z, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ avec $z = x_1 + ix_2$.

Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbf{R}^n$, A + B désigne l'ensemble des vecteurs X + Y, où X parcourt A et Y parcourt B.

Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ et ω une partie de Ω, $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions à valeurs complexes indéfiniment différentiables sur Ω et $\mathcal{D}(\omega, \Omega)$ la partie de $\mathcal{D}(\Omega)$ constituée par celles qui s'annulent sur ω; pour $n = 3$, $H(\Omega)$ est formé par les fonctions f de $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que, pour tout nombre c réel, la fonction partielle $z \longmapsto f(z, c)$ soit holomorphe sur la section de Ω par le plan d'équation $x_3 = c$; la dérivée de cette fonction sera notée $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

I

On désigne par S l'ensemble des suites doubles $\mathbf{a} = (a_{p,q})$ à valeurs complexes indexées par $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$. Étant donné $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans S, $\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ désignera l'ensemble des suites $\mathbf{c}$ de S vérifiant pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$:

$$c_{p+1,q} = a_{p,q} c_{p+2,q+1} + b_{p,q} c_{p,q+2}.$$

1° Soit k un entier donné quelconque dans $\mathbf{N}$. Démontrer l'existence de fonctions $\Gamma_{i,j,k}$ polynomiales des $a_{p,q}$ et $b_{p,q}$, à coefficients positifs, et telles que pour tout $\mathbf{c}$ dans $\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ on ait :

$$c_{0,0} = \sum_{\substack{i+2j=3k \\ k \leqslant j \leqslant 2k}} \Gamma_{i,j,k}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) c_{i,j}.$$

2° Soit $\mathbf{a}' = (a'_{p,q})$ et $\mathbf{b}' = (b'_{p,q})$ deux suites à valeurs réelles de S, telles que pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ vérifiant $|p+1| \leqslant q$, on ait :

$$|a_{p,q}| \leqslant a'_{p,q} \quad \text{et} \quad |b_{p,q}| \leqslant b'_{p,q}.$$

Démontrer alors : $|\Gamma_{i,j,k}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leqslant \Gamma_{i,j,k}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$.

3° Soit $\boldsymbol{\varepsilon}$ la suite de S définie par $\varepsilon_{p,q} = \dfrac{\alpha}{q+1}$ $(\alpha \in \mathbf{C},\ \alpha \neq 0)$.

Vérifier l'inégalité : $|\Gamma_{i,j,k}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})| \leqslant \dfrac{|2\alpha|^k}{k!}$.

4° Soit A, λ et μ trois constantes réelles positives et $(\theta_p)_{p \in \mathbf{Z}}$ une suite de nombres complexes vérifiant $|\theta_p| \leqslant 1$ pour tout p. Démontrer que, si $\mathbf{c}$ est une suite de S vérifiant les relations :

$$c_{p+1,q} = \frac{\theta_p}{q+1} c_{p+2,q+1} + \frac{\mu(p+1)}{(q+1)(q+2)} c_{p,q+2} \quad \text{et} \quad |c_{p,q}| \leqslant \lambda A^{p+2q}$$

pour tout couple $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, alors il existe un nombre M, ne dépendant que de A, λ, μ, p, q, tel qu'on ait pour tout $k \geqslant 1$

$$|c_{p,q}| \leqslant \frac{M^k}{(k-1)!}.$$

(On pourra commencer par majorer $|c_{0,0}|$, puis ramener le cas général au cas précédent par une translation des indices.)

En déduire que les $c_{p,q}$ sont nuls.

II

Le point courant de $\mathbf{R}^2$ est noté (x, y); on étudie l'opérateur différentiel $D = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \boldsymbol{a}(x) \dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{b} \dfrac{\partial}{\partial x}$, où $\boldsymbol{a}$ est une fonction polynomiale du premier degré à coefficients complexes et $\boldsymbol{b}$ une constante complexe.

1° Π est le demi-plan formé par les points (x, y) vérifiant $y > 0$; K est une partie bornée contenue dans Π. Démontrer que toute fonction f de $\mathcal{D}(\Pi)$, nulle en dehors de K, bornée sur K ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux et vérifiant $Df = 0$, est nulle sur Π tout entier. (Pour cela, on pourra poser pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$

$$c_{p,q} = \iint_{\Pi} [\boldsymbol{a}(x)]^p y^q f(x, y)\, dx\, dy \quad \text{si} \quad p \geqslant 0$$
$$c_{p,q} = 0 \quad \text{si} \quad p < 0.$$

puis montrer que la suite $\mathbf{c} = (c_{p,q})$ vérifie les conditions du I 4° et en déduire le résultat).

2° Ω et ω sont deux ouverts convexes non vides de $\mathbf{R}^2$ vérifiant $\omega \subset \Omega \subset \omega + \mathbf{R}_2$ et $\omega \neq \Omega$;

$\complement\omega$ désigne le complémentaire de ω dans $\mathbf{R}^2$. Soit dans $\mathbf{R}^2$ une parabole $\mathcal{P}$ d'axe parallèle à $\mathbf{R}_2$ et d'équation

$$\varphi(x, y) = \alpha y - (x^2 + \beta x + \gamma) = 0;$$

$\mathcal{P}_i$ désigne l'intérieur de la parabole, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{(x, y) \mid \varphi(x, y) > 0\}.$$

a. Soit M un point donné dans $\Omega \cap \complement\omega$; démontrer qu'on peut choisir $\mathcal{P}$ de façon que M appartienne à $\mathcal{P}_i$ et que la composante connexe δ de $\mathcal{P}_i \cap \complement\omega$ contenant M soit relativement compacte et contenue dans Ω. $\mathcal{P}$ est ainsi choisie dans la suite.

b. Soit v une fonction de $\mathcal{D}(\omega, \Omega)$. Démontrer que la fonction $\tilde{v}$, qui est nulle en dehors de δ et coïncide avec v sur δ, appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{P}_i)$.

c. Soit Φ l'application : $(x, y) \longmapsto (x, \varphi(x, y))$. Démontrer que l'application $g \longmapsto g \circ \Phi$ définit une bijection de $\mathcal{D}(\pi)$ sur $\mathcal{D}(\mathcal{P}_i)$.

Expliciter en fonction de (α, β, γ) l'opérateur différentiel $\tilde{D}$ tel que pour tout g de $\mathcal{D}(\pi)$ on ait : $D(g \circ \Phi) = (\tilde{D}g) \circ \Phi$.

3° Déduire des questions précédentes que D est un opérateur injectif sur $\mathcal{D}(\omega, \Omega)$.

4° Démontrer que ce résultat subsiste pour l'opérateur

$$D_0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \boldsymbol{b} \frac{\partial}{\partial x}.$$

III

On étudie l'opérateur différentiel $\Delta = \dfrac{\partial}{\partial z} - i \dfrac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}$ défini sur les ensembles H (Ω) introduits dans le préambule.

Soit M un point (ζ, c) donné dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$.

1° Soit α un nombre complexe.

a. Démontrer que l'équation $\Delta u = 0$ a dans H $(\mathbf{C} \times \mathbf{R})$ une solution unique de la forme $\Psi(z)e^{\alpha x_3}$ et satisfaisant à $u(\zeta, c) = 1$. On appelle U_n cette solution pour $\alpha = \sqrt{n}\, e^{i\theta}$ $(n \in \mathbf{N},\ \theta$ réel donné).

b. Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ converge uniformément et absolument sur tout compact d'un demi-espace ouvert P_θ ayant M comme point frontière, et que la somme s de cette série est une fonction de $H(P_\theta)$ vérifiant $\Delta s = 0$.

c. Démontrer que s n'est pas bornée au voisinage de M.

2° Soit P le plan d'équation $x_2 = 0$ et $\tilde{\Delta}$ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Étant donné un demi-plan Π_1 de P, dont la frontière est parallèle à $\mathbf{R}_1$ ou $\mathbf{R}_3$, et un point M de cette frontière, démontrer qu'il existe une fonction h de $\mathcal{D}(\Pi_1)$ non bornée au voisinage de M et vérifiant $\tilde{\Delta} h = 0$.

IV

On suppose que Ω est une partie non vide, ouverte et convexe de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$.

1° *a.* Démontrer que, si A est une partie convexe de Ω ayant plus d'un point et contenue dans un plan parallèle à $\mathbf{C}_1$, alors toute fonction de $H(\Omega)$, qui s'annule sur A, s'annule aussi sur $(A + \mathbf{C}_1) \cap \Omega$.

b. Démontrer que, si B est une partie convexe de Ω contenue dans le plan d'équation $x_2 = a$ et formant un ouvert non vide de ce plan, alors toute fonction u de $H(\Omega)$, qui s'annule sur B et vérifie $\Delta u = 0$, s'annule nécessairement sur $(B + \mathbf{R}_3) \cap \Omega$.

2° Démontrer que deux points quelconques de Ω peuvent être joints par une ligne polygonale dont les côtés sont parallèles soit à $\mathbf{C}_1$, soit à $\mathbf{R}_3$.

3° On suppose que la partie ω de Ω est un ouvert non vide, convexe, borné du plan P d'équation $x_2 = 0$; $\mathcal{E}(\Omega)$ [resp. $\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$] désigne l'ensemble des solutions dans $H(\Omega)$ [resp. $\mathcal{D}(\omega)$] de l'équation $\Delta u = 0$ [resp. $\tilde{\Delta} w = 0$]. Pour tout u de $H(\Omega)$, $\tilde{u}$ est la restriction de u à ω.

Démontrer que l'application $u \longmapsto \tilde{u}$ est une injection de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$.

Démontrer, à l'aide des résultats de la partie III, que cette application n'est pas surjective.